Определим константу c_0 посредством равенства

$$c_0 = \lim_{N\to\infty}\left[2\sqrt{N} - \sum_{n=0}^{N} 1/\sqrt{n+1}\right]. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(P\chi_{mn}^{(0)}, \chi_{mn}^{(0)}) - A_m/\sqrt{n+1}] = c_0A_m, \text{ где } A_m = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{a}\frac{q(r)}{r^m}\,dr. \tag{10}$$

Складывая равенства (7) и (10), приходим к нужной нам формуле следа задачи (2):

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\lambda_{mn} - (2m+4n+2) - A_m/\sqrt{n+1}] = c_0A_m, \tag{11}$$

где константы c_0, A_m определены формулами (9), (10).

3. Формула следа задачи (1). Перепишем равенство (11) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\lambda_{mn} - (2m+4n+2) - A_m/\sqrt{n+1} - c_0A_m/c\,(n+1)^{3/2}] = 0, \tag{12}$$

где $c = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1)^{3/2}$. Умножая (12) на ε_m и суммируя по m, приходим к теореме.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $q\,(r)$ — *непрерывная вещественнозначная функция, равная нулю вне отрезка* $[\varepsilon, a]$ $(0<\varepsilon<a)$. *Тогда формула регуляризованного следа задачи* (1) *имеет вид*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\sum_{n=0}^{\infty}[\lambda_{mn} - (2m+4n+2) - A_m/(n+1)^{1/2} -$$
$$- c_0A_m/(c\,(n+1)^{3/2})] = 0,$$

где

$$A_m = 1/\pi\int_{\varepsilon}^{a}(q\,(r)/r^m)\,dr,\quad c = \sum_{n=0}^{\infty}1/(n+1)^{3/2},$$

$$\varepsilon_0 = 1,\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2,$$

а константа c_0 *определяется равенством* (9).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
06.09.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гасымов М. Г.//ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1202—1205. 2. Гасымов М. Г., Левитан Б. М.//ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 5. С. 1014—1017. 3. КостюченкоА. Г.//Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МГУ, 1966. 4. Титчмарш Э. Ч. Т. 2. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 5. Левитан Б. М., Саргсян И. С. М.: Наука, 1970. 6. Сегё Г. М.: Физматгиз, 1962.

ПРИЗНАК НЕКОМПАКТНОСТИ СЛОЕНИЯ НА M_g^2

И. А. Мельникова

1. Предварительные определения. Рассмотрим замкнутую форму ω, определенную на многообразии M и обладающую невырожденными изолированными особенностями

Определение 1. [1] Точка $p \in M$ называется регулярной особенностью ω, если в некоторой окрестности $O\,(p)$ $\omega = df$, где f — функция Морса, имеющая особенность в p

Форма ω определяет слоение F_ω на множестве $M - \mathrm{Sing}\,\omega$.

Определение 2. Рассмотрим γ-неособые компактные слои F_ω и отображение $\gamma \to [\gamma] \in H_1(M_g^2)$. Его образ порождает подгруппу в $H_1(M_g^2)$. Обозначим ее H_ω.

Определение 3. [2] Пусть $[z_1], \ldots, [z_{2g}]$ — некоторый базис циклов в $H_1(M_g^2)$, тогда

$$\operatorname{dirr} \omega = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}} \left\{ \int_{z_1} \omega, \ldots, \int_{z_{2g}} \omega \right\} - 1.$$

Обозначим M_ω множество, полученное выбрасыванием всех максимальных окрестностей, состоящих из диффеоморфных компактных слоев и всех слоев, которые могут быть компактифицированы добавлением особых точек.

В работе [2] было доказано, что в случае $\operatorname{dirr} \omega \leq 0$ всегда $M_\omega = \varnothing$. Цель настоящей работы — для слоения на поверхности M_g^2 указать достаточное условие того, чтобы $M_\omega \neq \varnothing$. А именно (теорема 2): если $g \neq 0$ и $\operatorname{dirr} \omega \geq g$, то $M_\omega \neq \varnothing$.

2. Основная теорема. Вначале докажем следующий критерий.

ТЕОРЕМА 1. $M_\omega = \varnothing \Longleftrightarrow \operatorname{rk} H_\omega = g$.

Доказательство. 1. Пусть $M_\omega = \varnothing$, тогда F_ω содержит два типа слоев:

1) Слои, которые могут быть компактифицированы добавлением к ним особых точек. Обозначим эти слои γ_k^0. Их конечное число, поскольку особенности формы ω изолированы.

2) Неособые компактные слои.

Пусть γ — неособый компактный слой ω. Обозначим $O(\gamma)$ максимальную окрестность, состоящую из диффеоморфных ему слоев. Она представляет собой цилиндр с образующей γ. Край $\overline{O(\gamma)}$ содержит по крайней мере одну критическую точку формы ω. Ввиду невырожденности особенностей каждая критическая точка может содержаться в крае не более чем четырех цилиндров. Таким образом, число цилиндров не превышает 4*число критических точек. Следовательно, M_g^2 представимо в виде

$$M_g^2 = \cup_{n=1}^{N} O(\gamma_n) \cup_{k=1}^{K} \gamma_k^0 \cup_{\iota=1}^{I} p_\iota, \tag{1}$$

где p_ι — особые точки формы ω, N, k, $I < \infty$

2. Рассмотрим порожденную слоением F_ω группу H_ω.

ЛЕММА. $\operatorname{rk} H_\omega = 0 \Longleftrightarrow g = 0$.

Доказательство. В одну сторону утверждение тривиально. Пусть теперь $\operatorname{rk} H_\omega = 0$. Мы представим M_g^2 в виде (1). Обозначим $V_n = \overline{O(\gamma_n)}$ и $T = \cup_{n=1}^{N} \partial V_n$. Граница цилиндра V_n гомологична образующей. Тогда $M_g^2 = \cup_{n=1}^{N} V_n$, причем $V_i \cap V_j \subset T$. Рассмотрим произвольный цикл $[z] \in H_1(M_g^2)$. По условию $\operatorname{rk} H_\omega = 0$, следовательно, $\gamma_n \sim 0$, $n = 1, \ldots, N$. Тогда $z \circ \gamma_n = 0$ и $z \circ T = 0$. Существует $z' \in [z]$ такой, что $z' \cap T = \varnothing$. Таким образом, $z' = \cap m_\iota \gamma_\iota$, $\gamma_\iota \in V_\iota$. Поскольку $\gamma_\iota \sim 0$, то и $z' \sim 0$. Следовательно, $[z] = 0$. Лемма доказана.

3. Если $\operatorname{rk} H_\omega = 0$, то все доказано. Рассмотрим случай $\operatorname{rk} H_\omega = k \neq 0$.

Пусть $k = 1$ и $[\gamma]$ — образующая H_ω. Разрежем M_g^2 по соответствующему слою γ. Поскольку M_g^2 — ориентируемо, то при разрезании получится поверхность, край которой состоит из двух замкнутых кривых, каждая из которых является слоем. К каждому из двух образовавшихся краев приклеим круг D^2. Получится замкнутая поверхность M':

$$\chi(M') = \chi(M_g^2) + 2\chi(D^2) = 2 - 2(g - 1).$$

В силу классификационной теоремы о поверхностях $M' = M_{g-1}^2$.

Пусть $k > 1$ и $H_\omega = \langle [\gamma_1], \ldots, [\gamma_k] \rangle$. Обозначим $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ — множество разрезаемых слоев. Аналогичным образом, после разрезания M_g^2 по Γ и приклейки $2k$ дисков получим $M' = M_{g-k}^2$.

Каждый из приклеенных дисков стянем в точку, обозначим эти точки d_ι, $i = 1, \ldots, 2k$. На $M' \setminus \cup_{\iota=1}^{2k} d_\iota$ определена форма ω' такая, что $\omega'|_{M' \setminus \cup d_\iota} = \omega|_{M \setminus \Gamma}$. Она является замкнутой и определяет на множестве $M' \setminus \cup_{\iota=1}^{2k} d_\iota \setminus \operatorname{Sing} \omega$ слоение $F_{\omega'}$. Рассмотрим

$H_{\omega'}$. Пусть $[\gamma] \in H_{\omega'}$. Тогда $[\gamma] \in H_\omega$ и $\gamma - \sum m_i \gamma_i = \partial V$, V — пленка. Пусть V' — образ V в M'. Очевидно, что $\partial V' = \gamma$. Следовательно, $H_{\omega'} = 0$. Тогда по лемме $M^2_{g-k} = S^2$ и $k = g$. В одну сторону теорема доказана.

4. Пусть теперь $\operatorname{rk} H_\omega = g$. Тогда $H_\omega = \langle [\gamma_1], \ldots, [\gamma_g] \rangle$, где $\gamma_i \in F_\omega$. Разрежем M^2_g по этим слоям. Аналогично тому, как это делалось в п. 3, получим $M' = S^2$ и на нем слоение $F_{\omega'}$. Поскольку $d\omega' = 0$ и $H^1(S^2) = 0$, то форма является точной и слоение $F_{\omega'}$ компактно. Следовательно, компактно и слоение F_ω. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть ω — замкнутая форма с морсовскими особенностями, заданная на M^2_g, $g \neq 0$, такая, что* $\operatorname{dirr} \omega \geq g$ *Тогда слоение F_ω имеет некомпактный слой.*

Доказательство. Предположим противное: $M_\omega = \varnothing$. Тогда по теореме 1: $\operatorname{rk} H_\omega = g$. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_g \in F_\omega$ таковы, что $H_\omega = \langle [\gamma_1], \ldots, [\gamma_g] \rangle$. Дополним H_ω до базиса в $H_1(M^2_g)$: $[z_1], \ldots, [z_g]$. Тогда

$$\operatorname{dirr} \omega = \operatorname{rk}_Q \left\{ \int_{z_1} \omega, \ldots, \int_{z_g} \omega \right\} - 1 \leq g - 1.$$

Противоречие. Теорема 2 доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
24.01.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Damir H.//J. Funct. Anal. 1987. V. 75, N 2. 2. Новиков С. П.//УМН. 1982. Т. 37, вып. 5.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ, ТОМ 53, ВЫПУСК 3, 1993
Редактор О. Л. Толстова
Технический редактор О. Н. Никитина

Сдано в набор 10.12.92. Подписано к печати 03.03.93 Формат 60×90 1/16
Печать офсетная Усл. печ. л. 10.0 Усл. кр.-отт. 9,5 тыс. Уч.-изд. л. 11,6 Бум. л. 5,0
Тираж 926 экз. Заказ 3629. Цена 10 р.

Отпечатано в Московской типографии № 2 ВО «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6