Математические заметки

том 63 выпуск 6 июнь 1998

УДК 515.164

НЕКОМПАКТНЫЕ СЛОИ СЛОЕНИЯ МОРСОВСКОЙ ФОРМЫ

И. А. Мельникова

В статье рассматриваются слоения, определяемые морсовской формой на компактном многообразии. Получено неравенство, связывающее число компонент связности множества, состоящего из некомпактных слоев, число гомологически независимых компактных слоев и количество особых точек морсовской формы.

Библиография: 4 названия.

Рассмотрим морсовскую форму ω, определяющую на компактном многообразии M^n слоение с особенностями $\mathscr{F}_\omega$. Для компактных слоений в работе [1] автором была получена оценка числа гомологически независимых компактных слоев через количество особых точек морсовской формы. В данной статье это неравенство обобщается на случай некомпактных слоений.

Кроме того, через характеристики морсовской формы получена оценка числа s компонент связности множества, состоящего из некомпактных слоев. В работе [2] П. Арнуа и Г. Левиттом была получена оценка числа s через характеристики многообразия:

$$s \leqslant \frac{1}{2}\beta_1(M^n). \tag{1}$$

В данной статье показано, что для двумерных многообразий обе оценки совпадают, но в общем случае являются независимыми.

1. Основные определения. Рассмотрим гладкое компактное связное ориентируемое n-мерное многообразие M и определенную на нем замкнутую 1-форму ω с морсовскими особенностями; такую форму мы называем *морсовской*. Обозначим множество ее особых точек через $\operatorname{Sing}\omega$. Замкнутая форма ω определяет на множестве $M \setminus \operatorname{Sing}\omega$ слоение $\mathscr{F}$ коразмерности 1.

Определим на многообразии M слоение с особенностями $\mathscr{F}_\omega$ следующим образом.

Пусть в окрестности особой точки $p \in \operatorname{Sing}\omega$ слоение $\mathscr{F}$ локально определяется уровнями функции f_p, причем $f_p(p) = 0$. Очевидно, $f_p^{-1}(0) \setminus p \subset \cup\gamma_i$, где $\gamma_i \in \mathscr{F}$.

Слой $\gamma \in \mathscr{F}$ называется *неособым слоем* слоения $\mathscr{F}_\omega$, если для любого $p \in \operatorname{Sing}\omega$ $\gamma \cap f_p^{-1}(0) = \varnothing$.

Обозначим $F_p = p \cup \{\gamma \in \mathscr{F} \mid \gamma \cap f_p^{-1}(0) \neq \varnothing\}$. Пусть $F = \bigcup_{p\in\operatorname{Sing}\omega} F_p$. *Особым слоем* γ_0 слоения $\mathscr{F}_\omega$ называется связная компонента множества F. Число особых слоев морсовской формы, очевидно, конечно.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00276.

Сопоставим каждому неособому компактному слою $\gamma \in \mathscr{F}_\omega$ его гомологический класс $[\gamma]$. Образ множества неособых компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в группе $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее через H_ω.

Пусть p – особая точка морсовской формы ω и $x^1, \dots, x^n$ – координаты в окрестности точки p такие, что

$$\omega = \sum_{i=1}^{\lambda} x^i\,dx^i - \sum_{i=\lambda+1}^{n} x^i\,dx^i.$$

Индексом $\operatorname{ind} p$ особой точки p называется число $\min\{\lambda, n-\lambda\}$. Обозначим через Ω_i множество особых точек индекса i.

2. Граф слоения. Рассмотрим множество $U \subset M$, состоящее из всех неособых компактных слоев слоения $\mathscr{F}_\omega$. Согласно лемме 2.1 [3] всякий неособый компактный слой обладает окрестностью, состоящей из диффеоморфных ему слоев, максимальную такую окрестность обозначим через $\mathscr{O}(\gamma)$. Тогда $U = \bigcup_\gamma \mathscr{O}(\gamma)$. Заметим, что если $\operatorname{Sing}\omega \neq \varnothing$, то $\mathscr{O}(\gamma) \simeq \gamma \times \mathbb{R}$.

Для различных γ, γ' множества $\mathscr{O}(\gamma)$ и $\mathscr{O}(\gamma')$ либо не пересекаются, либо совпадают. Поскольку к особой точке p приклеивается не более четырех цилиндров $\mathscr{O}(\gamma)$, т.е. $p \in \bigcup_{i=1}^k \overline{\mathscr{O}(\gamma_i)}$, $k \leqslant 4$, число различных множеств $\mathscr{O}(\gamma)$ конечно. Следовательно, $U = \bigcup_{i=1}^N \mathscr{O}(\gamma_i)$.

Множество $M \setminus U$ состоит из особых компактных и некомпактных слоев формы ω. Число особых компактных слоев конечно, и, как было показано в работе [2], число компонент связности множества, состоящего из некомпактных слоев, также конечно. Следовательно, множество $M \setminus U$ имеет конечное число компонент связности W_k.

Рассмотрим замыкание $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^N V_i$, где $V_i = \overline{\mathscr{O}(\gamma_i)}$. Согласно лемме 2.2 [3] каждая компонента связности края ∂V_i лежит в некотором особом слое γ_0. Поскольку особые слои принадлежат множеству $M \setminus U$, каждому особому слою γ_0 соответствует множество $W_k \supset \gamma_0$. Тогда и компоненте связности края ∂V_i соответствует множество W_k, при этом $\partial V_i \cap W_k \neq \varnothing$.

Поставим в соответствие многообразию M конечный граф Γ, отождествляя множества V_i с ребрами графа, а множества W_k – с вершинами. Ребро V_i инцидентно вершине W_k, если $\partial V_i \cap W_k \neq \varnothing$. Граф Γ назовем *ассоциированным графом* слоения $\mathscr{F}_\omega$.

Вершины W_k графа Γ могут быть двух типов. Если особый слой $\gamma_0 \subset W_k$ компактен, то $\gamma_0 = W_k$, поскольку согласно лемме 2.5 [3] достаточно малая окрестность компактного особого слоя состоит из неособых компактных слоев. Вершины $W_k = \gamma_0$ будем называть *вершинами первого типа* и обозначать γ_0, им соответствуют компактные особые слои. Вершины $W_k \neq \gamma_0$ будем называть *вершинами второго типа*, им соответствуют некомпактные особые слои.

Рассмотрим вершины первого типа: особый слой γ_0 является компактным. Если $\gamma_0 \cap \Omega_0 \neq \varnothing$, то соответствующая вершина имеет степень 1. Если $|\gamma_0 \cap \Omega_1| = m > 0$, то согласно теореме 3.1 [3] вершина имеет степень $\deg \gamma_0 \leqslant m+2$. Если $\gamma_0 \cap (\Omega_0 \cup \Omega_1) = \varnothing$, то вершина имеет степень 2.

Рассмотрим вершины второго типа: особые слои $\gamma_0 \subset W_k$, к которым приклеиваются множества V_i, являются некомпактными. Очевидно, $\gamma_0 \cap \Omega_0 = \varnothing$. Если $|\gamma_0 \cap \Omega_1| = m > 0$, то согласно теореме 3.1 [3] к слою γ_0 приклеивается не более m множеств V_i. Если $\gamma_0 \cap \Omega_1 = \varnothing$, то, очевидно, $\gamma_0 \cap \partial V_i = \varnothing$.

Таким образом, суммируя по всем особым слоям, лежащим в W_k, получим, что если $|W_k \cap \Omega_1| = m$, то степень вершины W_k не больше m. Заметим, что $m = 0$ только в том случае, когда слоение не имеет компактных слоев.

Граф Γ является связным.

3. Основная теорема. Обозначим через s число компонент связности множества, состоящего из некомпактных слоев.

Теорема 1. $\operatorname{rk} H_\omega + s \leqslant \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1$.

Доказательство. Рассмотрим граф Γ слоения $\mathscr{F}_\omega$. Обозначим через $m(\Gamma)$ циклический ранг графа Γ, через Q число его ребер, через $P^{(j)}$ число вершин j-го типа, $j = 1, 2$. Согласно теореме 4.5 [4] для связного графа справедливо равенство

$$m(\Gamma) = Q - (P^{(1)} + P^{(2)}) + 1.$$

Пусть $k_i^{(j)}$ – число вершин j-го типа степени i. Тогда

$$P^{(j)} = \sum_{i>0} k_i^{(j)}$$

и по теореме 2.1 [4]

$$2Q = \sum_{i>0} i(k_i^{(1)} + k_i^{(2)}).$$

Заметим, что $s = P^{(2)}$. Таким образом,

$$2m(\Gamma) + 2s = -k_1^{(1)} + \sum_{i>1}(i-2)k_i^{(1)} + \sum_{i>0} ik_i^{(2)} + 2.$$

Очевидно, $k_1^{(1)} = |\Omega_0|$. Второе слагаемое в силу теоремы 3.1 [3] не превосходит числа особых точек индекса 1, лежащих на компактных слоях. Как было показано выше, $\deg W_k \leqslant |W_k \cap \Omega_1|$; следовательно, третье слагаемое не превосходит числа особых точек индекса 1, лежащих на некомпактных слоях. Таким образом, справедливо неравенство

$$2m(\Gamma) + 2s \leqslant |\Omega_1| - |\Omega_0| + 2.$$

Рассмотрим циклический ранг графа Γ.

Лемма 1. $\operatorname{rk} H_\omega \leqslant m(\Gamma)$.

Доказательство. Каждая вершина ассоциированного графа Γ определяет линейное уравнение на гомологические классы слоев $\gamma_i \in V_i$, а весь граф Γ определяет систему из P таких уравнений с Q неизвестными, где P – число вершин графа, Q – число ребер. Ранг $\operatorname{rk} H_\omega$ не превосходит ранга пространства решений этой системы. Матрицей системы является матрица инцидентности связного графа Γ размерности $P \times Q$. При этом столбцы, соответствующие петлям графа, являются нулевыми, поскольку ребро, являющееся петлей, входит в соответствующую вершину дважды, причем с разными знаками. Ранг матрицы инцидентности по теореме 13.6 [4] равен $P - 1$. Следовательно, $\operatorname{rk} H_\omega \leqslant Q - P + 1 = m(\Gamma)$. Лемма доказана.

Согласно лемме 1

$$2\,\mathrm{rk}\,H_\omega + 2s \leqslant |\Omega_1| - |\Omega_0| + 2.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что число s компонент связности множества, состоящего из некомпактных слоев, оценивается сверху:

$$s \leqslant \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1. \tag{2}$$

Покажем, что оценки (1) и (2) независимы.

Рассмотрим обмотку тора T^n, определяемую неособой 1-формой с постоянными коэффициентами. Поскольку $|\Omega_1| = |\Omega_0| = 0$, согласно (2) $s \leqslant 1$. Так как $\beta_1(T^n) = n$, то $s \leqslant n/2$, т.е. для $n > 2$ оценка (2) является более точной.

Рассмотрим многообразие M^n со свойством $\beta_1(M^n) = 1$ и слоение, определяемое функцией высоты. Тогда $|\Omega_0| = 2$, $|\Omega_1| \geqslant 2$ и согласно (2) $s \leqslant 1$. С другой стороны, согласно оценке (1) $s \leqslant 1/2$. Следовательно, оценка (1) является более точной.

Как показывает следующее утверждение, в двумерном случае обе оценки совпадают.

Следствие 1. *На двумерном многообразии M_g^2 справедливо неравенство*

$$\mathrm{rk}\,H_\omega + s \leqslant g.$$

Доказательство. На двумерном многообразии M_g^2 имеем $|\Omega_1| - |\Omega_0| = 2g - 2$. Осталось воспользоваться теоремой 1.

Из соотношения особых точек индекса 0 и 1 можно сделать некоторые выводы о характере слоения.

Следствие 2. *Если $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то слоение компактно и все его слои гомологичны нулю.*

Доказательство. Если $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то из теоремы 1 следует, что $\mathrm{rk}\,H_\omega = s = 0$.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Мищенко за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мельникова И. А. Особые точки морсовской формы и слоения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. №4. С. 37–40.
[2] Arnoux P., Levitt G. Sur l'unique ergodicite des 1-formes fermées singulières // Invent. Math. 1986. V. 84. P. 141–156.
[3] Мельникова И. А. Компактные слоения морсовских форм. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1996.
[4] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

Центральный научно-исследовательский институт
экономики, информатики и систем управления
E-mail: melnikova@micron.msk.ru

Поступило
18.03.97